

سیستم اول:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y \\ \dot{y} = -17x - 5y \end{cases}$$

برای بدست آوردن نقاط تعادل سیستم فوق مقادیر مشتق متغیرهای حالت را برابر صفر قرار می دهیم:

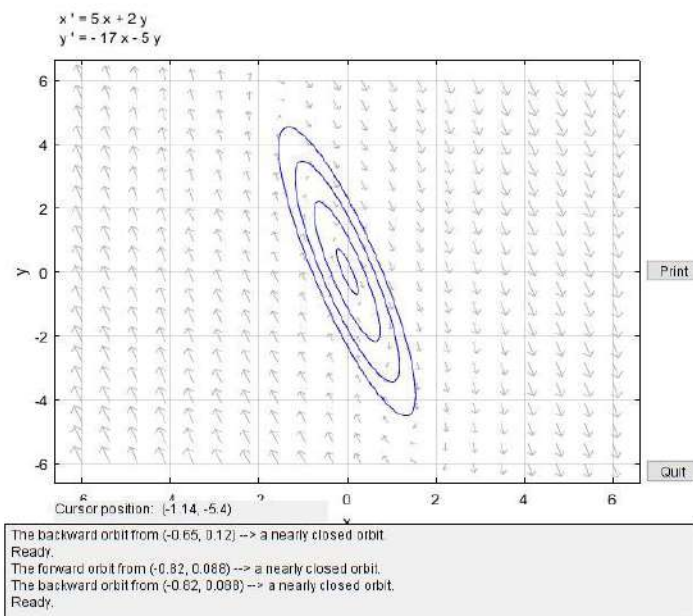
$$\begin{cases} 0 = 5x + 2y \\ 0 = -17x - 5y \end{cases}$$

سپس معادله مشخصه سیستم بالا را بازنویسی خواهیم کرد که به صورت معادله زیر خواهد شد:

$$\ddot{x} + 0\dot{x} + 9x = 0 \rightarrow \ddot{x} = -9x \rightarrow (s^2 + 9) = 0 \quad s = \pm 3i$$

جواب این معادله مشخص می شود که سیستم به صورت نوسانی می باشد و از نوع هم مرکز می باشد.

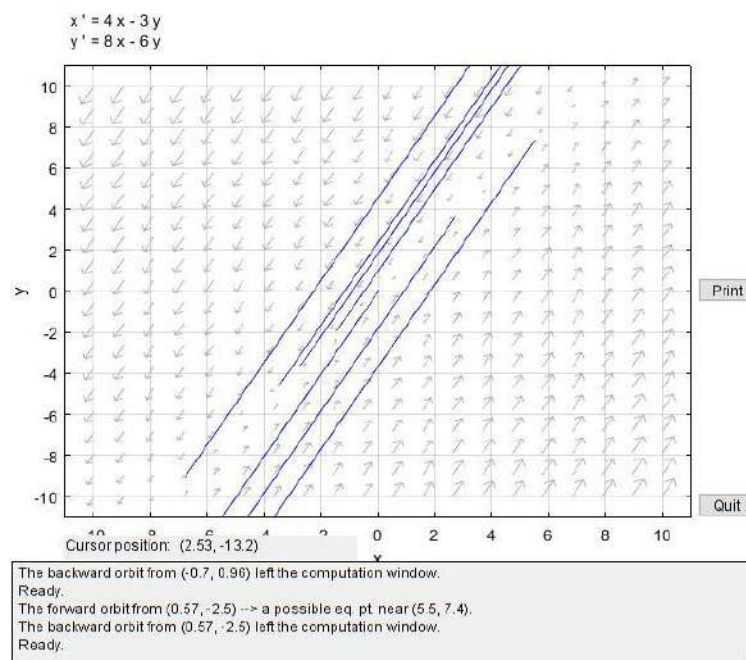
مشاهده می شود با توجه به اینکه سیستم خطی می باشد و نقطه ی تعادل سیستم بر روی مبدا مختصات قرار دارد و نوع نقطه تکین از نوع کانون هم مرکز می باشد در این نوع سیستم ها یک نقطه ی تکین وجود دارد و آن هم مبدا مختصات می باشد. در شکل پایین مشخص است که در زمان های متفاوت حول مبدا مختصات گردش می کند. بنابراین می توان گفت سیستم حالت نوسانی دارد.



سیستم دوم:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y \\ \dot{y} = 8x - 6y \end{cases}$$

در سیستم بالا همانند سیستم قبل مشتقات متغیرهای حالت را برابر صفر قرار می دهیم همان طور که مشخص است سیستم از نوع خطی و نقطه ی مبدا مختصات به عنوان نقطه ی تعادل به حساب می آید. در شکل پایین مشاهده می شود که در واقع معادله اول و دوم به همدیگر وابسته می باشند بنابراین شکل خط با شیب 2 خواهیم داشت.



سیستم سوم:

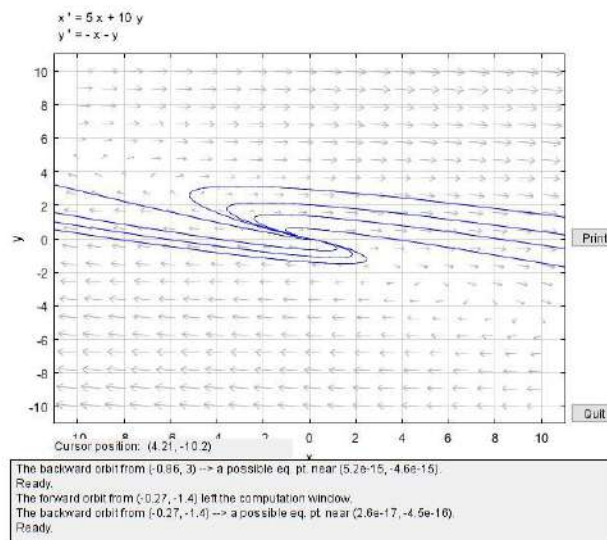
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 10y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

سپس معادله مشخصه سیستم بالا را بازنویسی خواهیم کرد که به صورت معادله زیر خواهد شد:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0 \rightarrow (s^2 - 4s + 5) = 0 \quad s = -2 \pm i$$

از جواب معادله مشخص می شود که رفتار سیستم پایدار به دلیل وجود جواب سمت چپ محور موهومی می باشد
سیستم از نوع خطی می باشد و نوع نقطه تعادل از نوع گره پایدار می باشد.

در شکل پایین باتوجه به اینکه دیاگرام از نقطه ی مبدا دور می شود لذا می توان گفت سیستم دو قطب در سمت راست محور موهومی خواهد داشت بنابراین ناپایدار می باشد.



سوال دوم:

سیستم اول:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right) \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right) \end{cases}$$

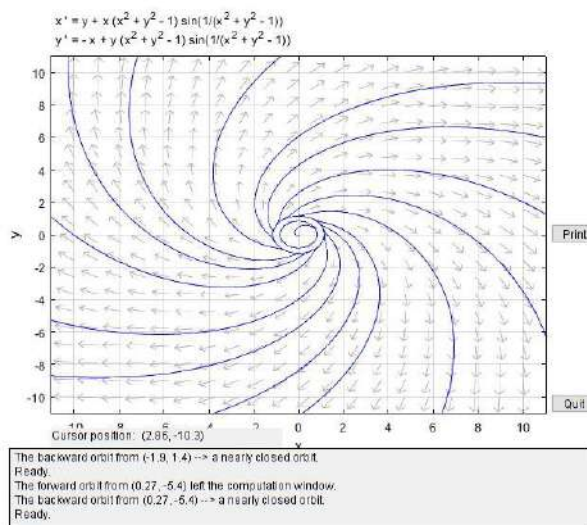
با برابر قرار دادن مشتقات متغیرهای حالت به رابطه ی ریز خواهیم رسید و نقاط تعادل را بدست خواهیم آورد.

$$\begin{cases} 0 = y + x(x^2 + y^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right) \\ 0 = -x + y(x^2 + y^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right) \end{cases}$$

با بررسی معادله فوق مشاهده می شود که مبدا مختصات به عنوان نقطه تعادل محسوب می شود. در واقع با تبدیل مختصات کارتزین به مختصات قطبی به رابطه ی زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} \dot{r} = (r^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right) r \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

با بررسی معادله فوق مشخص می شود که بی نهایت چرخه ی حدی وجود دارد هرچه r به سمت بی نهایت میل کند جواب به صورت نمایی از مبدا مختصات دور خواهد شد و علاوه بر دور شدن زاویه ی شکل نسبت به مبدا مختصات تغییر خواهد کرد بنابراین با یک سیستم کانون ناپایدار مواجه هستیم .

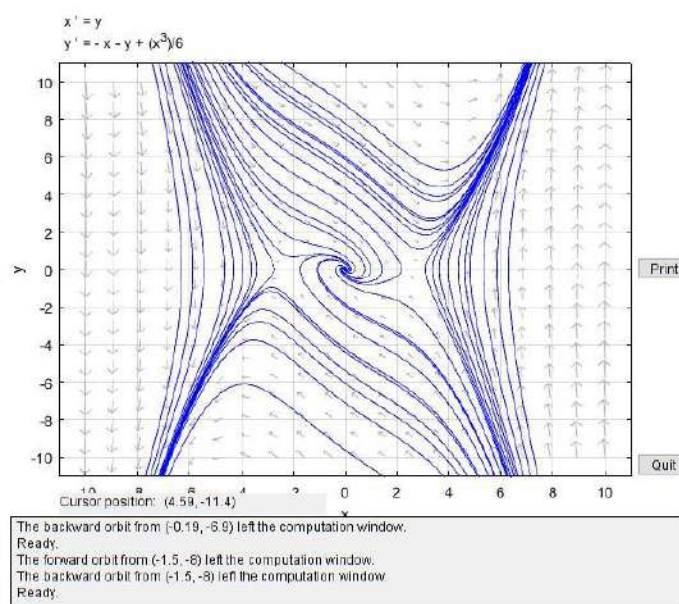


سیستم دوم:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y + \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

با صفر قرار دادن مشتقات مرتبه اول مشخص می شود که نقطه $p(\pm\sqrt{6}, 0)$ و مبدا مختصات به عنوان نقطه ی تعادل محسوب می شوند.

با توجه به اینکه دو معادله از دو جز خطی و غیر خطی تشکیل شده اند می توان معادلات فوق را با ترکیب خطی تقریب زد در این صورت رفتار محلی سیستم غیر خطی مشخص می شود در واقع می توان در نزدیکی مبدا ترم های مرتبه بالاتر را نادیده در نظر گرفت لذا با این وجود سیستم در مبدا مختصات به صورت کانون پایدار و در دو نقطه مجانب مبدا مختصات به صورت زینی خواهد بود.



سیستم سوم:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(2 - 2x - y) \end{cases}$$

با بررسی معادله فوق مشخص می شود که علاوه بر مبدا مختصات نقطه ی $p(2/3, 2/3)$ به عنوان نقطه ی تکین محسوب می شود در ادامه نوع نقاط تکین از نظر تحلیلی بدست خواهند آمد.

با وجود ترم های غیر خطی در معادلات بالا در نزدیکی مبدا می توان از آن ها صرف نظر کرد لذا رفتار سیستم در نزدیکی به فرم دسته معادله زیر درخواهد آمد:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

با تقسیم دو معادله بر همدیگر فرم کلی معادلات به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{x}$$

بنابراین شکل صفحه فازی در نزدیکی نقطه مبدا به صورت خط گذر از مبدا می باشد و اما در خصوص نقطه ی دیگر نکین بدست آمده می توان گفت که این نقطه نقطه ی زینی محسوب می شود همچنین با استفاده از ماتریس ژاکوبین می توان نوع نقطه های تکین را بدست آورد:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \dot{x} = x(2 - x - 2y) \\ f_2(x, y) = \dot{y} = y(2 - 2x - y) \end{cases}$$

J=

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 - 2x - 2y & -2x \\ -2y & 2 - 2x - 2y \end{pmatrix}$$

به ازای مبدا مختصات ماتریس ژاکوبین به صورت زیر در محاسبه می شود:

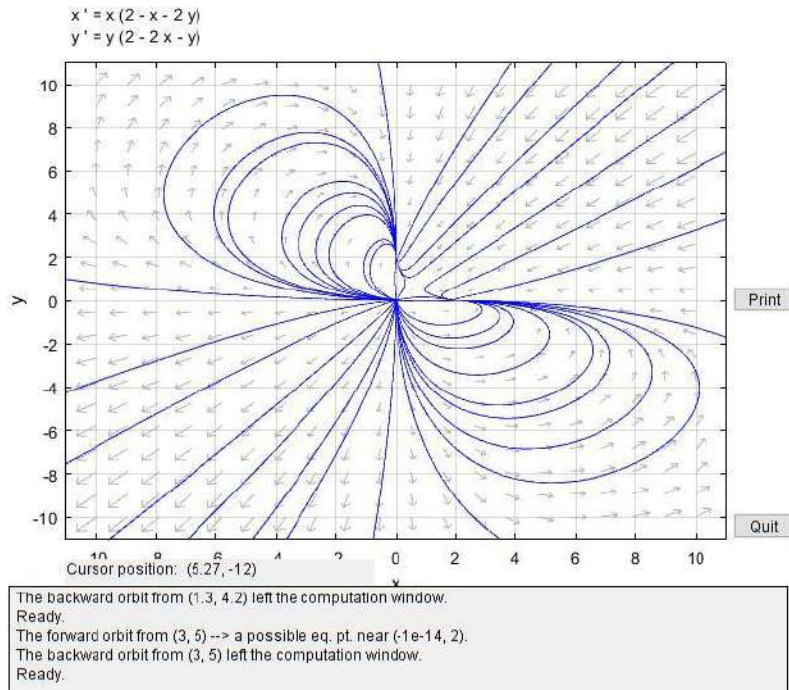
$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

با توجه به مقادیر ویژه ماتریس روبرو مشخص می شود که گره ناپایدار می باشد در خصوص نقطه تکین دیگر ماتریس ژاکوبین به صورت روبرو محاسبه می شود:

$$J = \begin{pmatrix} -2/3 & -4/3 \\ -4/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

با توجه به مقادیر ویژه ماتریس روبرونوع نقطه مد نظر زینی می باشد.

بنابراین در خصوص علامت حاصل بدست آمده نمی توان قطعی صحبت کرد بنابراین چرخه ی حدی در رفتار سیستم موجود می باشد.



سیستم چهارم:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x) - xy \end{cases}$$

با برابر قرار دادن مشتقات معادلات فوق به نقطه ی مبدا مختصات خواهیم رسید.

با تشکیل ماتریس ژاکوبین به ماتریس زیر خواهیم رسید.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

لذا خواهیم داشت:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x) - y & -x \end{pmatrix}$$

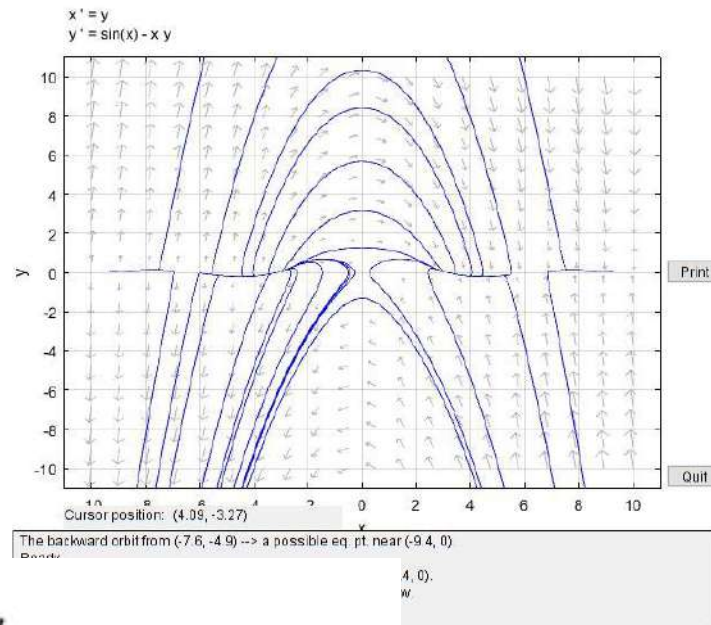
به ازای نقاط مبدا مختصات و نقطه ی $p_1 = (\pi, 0)$ خواهیم داشت:

$$J(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

به ازای مبدا به دلیل مثبت و منفی بودن مقادیر ویژه مختصات زینی خواهد بود

$$J(\pi,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\pi \end{pmatrix}$$

به ازای نقطه ی $p1(\pi,0)$ به دلیل منفی بودن مقادیر ویژه کانون پایدار می باشد.



سیستم پنجم:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2 \tan^{-1}(x + y) \end{cases}$$

ابتدا مشتقات متغیرهای حالت را برابر صفر قرار خواهیم داد و سپس ماتریس ژاکوبین معادلات بالا را تشکیل خواهیم داد.

مشاهده می شود که مبدا مختصات نقطه تکین سیستم خواهد بود در ادامه ماتریس ژاکوبین برابر است با:

J=

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

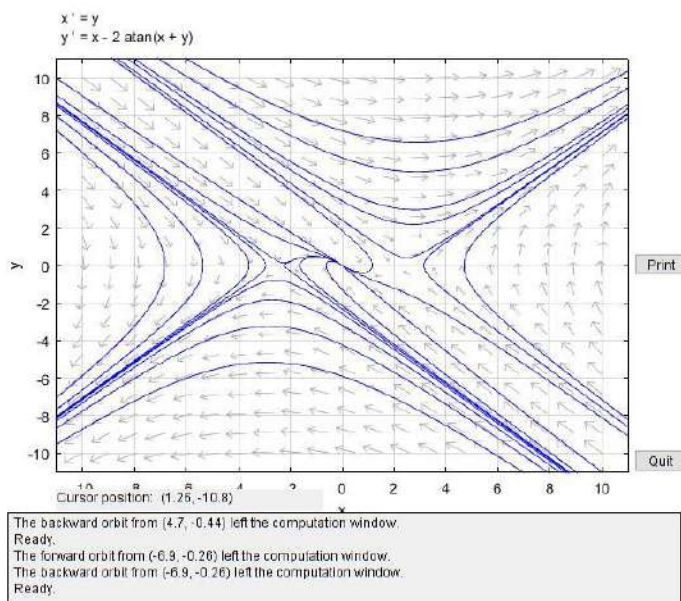
$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس فوق به ازای مبدا مختصات منفی خواهد بود بنابراین از نوع کانون پایدار خواهد بود.

علاوه بر مبدا مختصات نقاط $p_{1,2}=(\pm 1,0)$ به عنوان نقاط تکین محسوب می شود. لذا ماتریس ژاکوبین حاصل برابر است با:

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

با توجه به مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین می توان نتیجه گرفت که دو مقدار تکین از نوع زینی خواهند بود.



سوال سوم:

نقاط تعادل با قرار دادن مشتقات متغیرهای حالت حاصل می شوند با این وجود به ازای $k \neq -2$ مبدا مختصات تنها نقطه ی تعادل سیستم خواهد بود و برای $k=-2$ مجموعه ی نقاط تعادل سیستم خط $x_1 = 2x_2$ خواهد بود سپس با تشکیل ماتریس ژاکوبین نوع نقاط تعادل سیستم را بدست خواهیم آورد:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \begin{bmatrix} -1 & -k \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k}$$

مقدار k به ازای مقادیر مختلف سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{4} < k \quad \text{پایدار کانون}$$

$$-2 < k < \frac{1}{4} \quad \text{پایدار گره}$$

$$k < -2 \quad \text{زینی}$$